Glava 3

KONTINUALNI SISTEMI

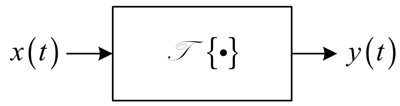
Sistem posmatramo kao proces čija je uloga transformacija signala. Ulazni i izlazni signali sistema su međusobno povezani transformacijom koju sistem vrši nad ulaznim signalima. Mi ćemo uglavnom posmatrati sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom. *Kontinualni sistem* definišemo kao proces koji transformiše kontinualni ulazni signal u kontinualni izlazni signal. Simbolički tu transformaciju označavamo sa:

$$y(t) = \mathscr{T}\{x(t)\}, \tag{3.1}$$

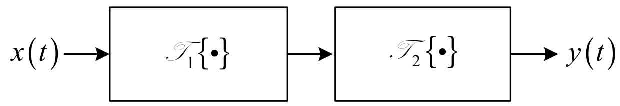
ili sa:

$$x(t) \to y(t), \tag{3.2}$$

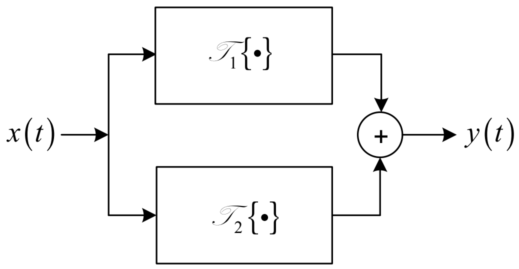
pri čemu je sa $x(t)$ označen ulazni a sa $y(t)$ izlazni signal. Blok dijagram kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazan je na Slici 3.1.



Slika 3.1 Blok dijagram kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.



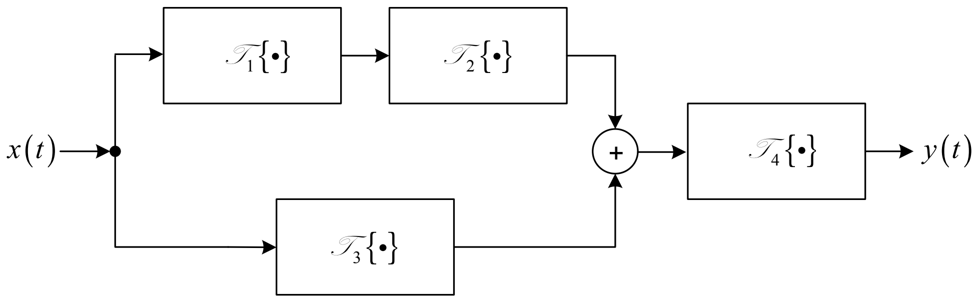
Slika 3.2 Kaskadna veza sistema.



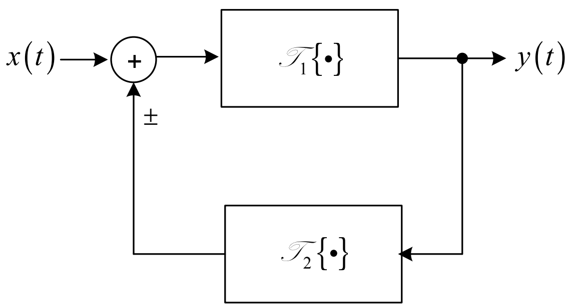
Slika 3.3 Paralelna veza sistema.

U praksi se često susrećemo sa složenim sistemima. Razmatranje takvih sistema je poželjno svesti na jednostavniji problem, te se složeni sistem predstavlja vezom dva ili više sistema, koja može biti *serijska* (ili *kaskadna*), *paralelna* ili *kombinovana*. Posebnu klasu čine sistemi sa *povratnom vezom*. Kaskadna veza dva sistema prikazana je na Slici 3.2, dok je paralelna veza sistema data na Slici 3.3. Slika 3.4 prikazuje primjer kombinovanog vezivanja sistema. Simbolom $\oplus$ označeno je sabiranje signala.

Kod sistema sa povratnom vezom se izlaz prvog sistema, koji je u direktnoj grani, preko drugog sistema u povratnoj grani vraća na ulaz prvog sistema, kao što je prikazano na Slici 3.5. Povratna veza može biti pozitivna ili negativna, što se na šemi označava simbolom $\pm$ na liniji povratne veze.



Slika 3.4 Primjer kombinovane veze sistema.



Slika 3.5 Sistem sa povratnom vezom.

3.1 Osobine kontinualnih sistema

U ovom poglavlju ćemo uvesti i opisati osnovne osobine kontinualnih sistema. Mnoge od njih imaju svoje fizičko značenje i omogućavaju nam bolje razumijevanje matematičke reprezentacije signala i sistema.

3.1.1 Sistemi sa i bez memorije

Kažemo da je *sistem bez memorije* ako njegov izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tom trenutku. Na primjer, otpornik otpornosti R je sistem bez memorije, jer vrijednost napona $y(t)$ na njegovim krajevima u svakom trenutku zavisi samo od vrijednosti struje $x(t)$ kroz otpornik u tom trenutku:

$$y(t) = Rx(t). \tag{3.3}$$

Još jedan jednostavan primjer kontinualnog sistema bez memorije je sistem koji prenosi signal bez ikakvih promjena, opisan sa:

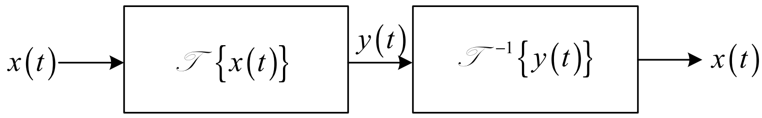
$$y(t) = x(t). \tag{3.4}$$

Kod kontinualnih *sistema sa memorijom* izlaz u nekom trenutku zavisi ne samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog i/ili izlaznog signala. Kondenzator kapacitivnosti C je primjer sistema sa memorijom, jer je napon $y(t)$ na njegovim krajevima posljedica svih prethodnih vrijednosti struje $x(t)$ koja je tekla kroz kondenzator:

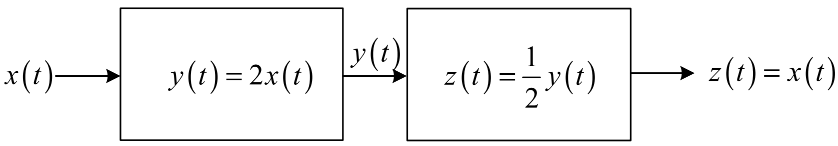
$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau. \tag{3.5}$$

3.1.2 Invertibilnost i inverzni sistemi

Za sistem kažemo da je *invertibilan* ako različiti ulazni signali proizvode različite izlazne signale. Drugim riječima, sistem je invertibilan ako poznavajući izlazni signal, teorijski gledano, možemo jednoznačno odrediti ulazni signal. *Inverzni sistem* je sistem koji treba kaskadno vezati originalnom sistemu, tako da njegov izlazni signal bude jednak ulaznom signalu u originalni sistem, kao na Slici 3.6.



Slika 3.6 Koncept invertibilnosti: kaskadna veza originalnog i inverznog sistema.



Slika 3.7 Kaskadna veza originalnog sistema datog sa (3.6) i inverznog sistema datog sa (3.7).

Kao primjer invertibilnog sistema možemo posmatrati sistem koji dva puta pojačava ulazni signal:

$$y(t)=2x(t), \tag{3.6}$$

za koga je inverzni sistem opisan sa:

$$z(t)=\frac{1}{2}y(t). \tag{3.7}$$

Kaskadna veza datog i njemu inverznog sistema prikazana je na Slici 3.7.

Najjednostavniji primjer neinvertibilnog sistema je:

$$y(t)=0. \tag{3.8}$$

Takođe, neinvertibilan je i sistem opisan sa:

$$y(t)=x^2(t). \tag{3.9}$$

3.1.3 Kauzalnost

Sistem je *kauzalan* ako izlaz sistema u bilo kom trenutku zavisi samo od vrijednosti njegovog ulaza u tekućem i prethodnim trenucima. Dakle, kod kauzalnih sistema odziv ne postoji prije dovođenja pobudnog signala. Primjetimo da su svi sistemi bez memorije kauzalni.

Kao primjer nekauzalnog sistema možemo navesti sistem opisan sa:

$$y(t) = x(t + t_0),\ t_0 > 0. \tag{3.10}$$

Ovaj sistem nije kauzalan, jer je za određivanje odziva u bilo kom trenutku neophodno poznavanje budućih vrijednosti ulaznog signala. Vrijednost izlaznog signala za neku vrijednost nezavisne promjenljive $t = t_1$ je moguće generisati tek nakon što bude poznata vrijednosti ulaznog signala u trenutku $t = t_1 + t_0$.

Za kauzalne sisteme možemo reći da pobuda u trenutku t_2 ne utiče na odziv sistema u trenutku t_1, ukoliko je $t_2 > t_1$, dok kod nekauzalnih to nije slučaj.

3.1.4 Stabilnost

Stabilnost je veoma važna osobina sistema. Intuitivno, sistem je *stabilan* ako mala promjena ulaza ne generiše izlaz koji divergira. Drugim riječima, odziv na ograničenu pobudu mora biti ograničen da bi sistem bio stabilan. U suprotnom, sistem je *nestabilan*. Fizički fenomeni, kao što su lančane reakcije ili rast populacije, koji se mogu opisati rastućim eksponencijalnim signalima, su primjeri odziva nestabilnih sistema. Odzivi *RLC* kola, koji se opisuju opadajućim eksponencijalnim signalima, predstavljaju primjere odziva stabilnih sistema.

3.1.5 Vremenska invarijantnost

Ako pomak ulaznog signala u vremenu uzrokuje samo pomak izlaznog signala za isti vremenski iznos, bez promjene oblika signala, kažemo da je sistem *vremenski invarijantan* i to formalno zapisujemo sa:

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \to y(t-t_0)\,. \tag{3.11}$$

Pri tome pod izlaznim signalom podrazumijevamo odziv sistema pri nultim početnim uslovima. Kod vremenski invarijantnih sistema talasni oblik izlaznog signala ne zavisi od trenutka u kome se dovodi pobudni signal.

Primjer 3.1:

Provjeriti da li je sistem opisan sa $y(t)=\sin\left[x(t)\right]$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Pretpostavimo da je ulazni signal bilo kog oblika označen sa $x_1(t)$. Odziv datog sistema na pretpostavljeni ulazni signal je:

$$y_1(t)=\sin\left[x_1(t)\right]. \tag{3.12}$$

Zatim pretpostavimo da je ulazni signal pomjerena verzija prethodnog ulaznog signala, tj.:

$$x_2(t)=x_1(t-t_0)\,. \tag{3.13}$$

Odziv je sada dat sa:

$$y_2(t)=\sin\left[x_2(t)\right]=\sin\left[x_1(t-t_0)\right]. \tag{3.14}$$

Poređenjem (3.14) sa $y_1(t)=\sin\left[x_1(t)\right]$ zaključujemo da je ovaj odziv pomjerena verzija odziva na $x_1(t)$, tj.:

$$y_2(t)=y_1(t-t_0)\,, \tag{3.15}$$

te je dati sistem vremenski invarijantan.

□

Primjer 3.2:

Provjeriti da li je sistem opisan sa $y(t) = tx(t)$ vremenski invarijantan.

Rješenje:

Za ulazni signal $x_1(t)$ odziv datog sistema ima oblik:

$$y_1(t) = tx_1(t). \tag{3.16}$$

Ako je ulazni signal pomjerena verzija prethodnog ulaznog signala:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0), \tag{3.17}$$

odziv je dat sa:

$$y_2(t) = tx_2(t) = tx_1(t - t_0). \tag{3.18}$$

Pomjerena verzija prvobitnog odziva je:

$$y_1(t - t_0) = (t - t_0)x_1(t - t_0). \tag{3.19}$$

Vidimo da je:

$$y_2(t) \neq y_1(t - t_0), \tag{3.20}$$

te dati sistem nije vremenski invarijantan.

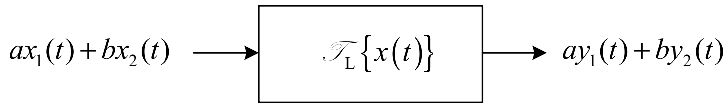
□

3.1.6 Linearnost

Sistem je *linearan* ako je odziv na težinsku sumu signala jednak na isti način formiranoj težinskoj sumi pojedinačnih odziva na svaki od tih signala. Matematički zapisano, sistem je linearan ako vrijedi:

$$x_1(t) \to y_1(t) \wedge x_2(t) \to y_2(t) \Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t),\ \forall a, b \in \mathbb{C}. \tag{3.21}$$

Princip linearnosti se sastoji od principa *homogenosti* i principa *aditivnosti*. Princip homogenosti kaže da je:



Slika 3.8 Princip linearnosti.

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow ax(t) \to ay(t),\ \forall a \in \mathbb{C}, \tag{3.22}$$

dok je po principu aditivnosti:

$$x_1(t) \to y_1(t) \wedge x_2(t) \to y_2(t) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t). \tag{3.23}$$

Princip linearnosti je šematski ilustrovan na Slici 3.8.

Lako se pokaže da za linearni sistem vrijedi da je za pobudni signal:

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t), \tag{3.24}$$

odziv jednak:

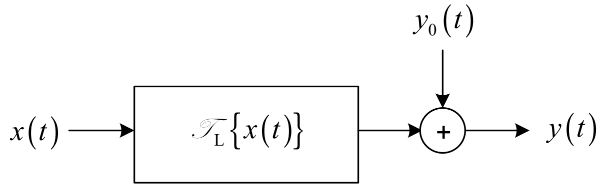
$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t), \tag{3.25}$$

pri čemu su $x_k(t),\ k = 1,2,\ldots$ pojedinačni pobudni signali, a $y_k(t),\ k = 1,2,\ldots$ njima odgovarajući odzivi. Ova važna činjenica je poznata kao *osobina superpozicije* linearnih sistema.

Linearni sistemi imaju još jednu osobinu koja je direktna posljedica linearnosti, a to je da je odziv na signal koji je jednak nuli, takođe jednak nuli:

$$x(t) = 0 \cdot x_1(t) = 0 \to y(t) = 0 \cdot y_1(t) = 0. \tag{3.26}$$

Posebnu klasu sistema čine *inkrementalno linearni sistemi*. Sistem je inkrementalno linearan ako linearno odgovara na promjenu ulaznog signala. To znači da je razlika odziva na bilo koja dva ulazna signala linearno zavisna od njihove razlike. Inkrementalno linearni sistem se može blokovski predstaviti preko linearnog sistema, kao što je prikazano na Slici 3.9.



Slika 3.9 Struktura inkrementalno linearnog sistema.

Primjer 3.3:

Provjeriti da li je sistem opisan sa $y(t)=2x(t)+3$ linearan i inkrementalno linearan.

Rješenje:

Odzivi datog sistema na dva pobudna signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ su:

$$y_1(t)=2x_1(t)+3, \tag{3.27}$$

$$y_2(t)=2x_2(t)+3, \tag{3.28}$$

dok je odziv na njihovu linearnu kombinaciju:

$$y(t)=2\left[ax_1(t)+bx_2(t)\right]+3=2ax_1(t)+2bx_2(t)+3\neq ay_1(t)+by_2(t), \tag{3.29}$$

te sistem nije linearan.

Međutim, sistem jeste inkrementalno linearan, jer vrijedi da je razlika odziva linearno vezana sa razlikom pobudnih signala:

$$y_1(t)-y_2(t)=2x_1(t)+3-\left[2x_2(t)+3\right]=2\left[x_1(t)-x_2(t)\right]. \tag{3.30}$$

□

3.2 Klasifikacija kontinualnih sistema

Klasifikacija kontinualnih sistema je zasnovana na njihovim osobinama. Kontinualni sistemi se najčešće dijele na: statičke i dinamičke, kauzalne i nekauzalne, stabilne i nestabilne, sisteme sa raspodijeljenim i koncentrisanim parametrima, linearne i nelinearne, stacionarne i nestacionarne, te determinističke i stohastičke sisteme.

3.2.1 Statički i dinamički sistemi

Statički sistemi su sistemi bez memorije i kod njih izlaz u nekom trenutku zavisi od vrijednosti pobude samo u tom trenutku. Statički sistemi opisuju se algebarskim jednačinama. Primjer statičkog sistema je otpornik otpornosti R, opisan jednačinom koja uspostavlja vezu između struje $x(t)$ kao pobudnog i napona $y(t)$ kao signala odziva: $y(t) = Rx(t)$.

Dinamički sistemi su sistemi sa memorijom, što označava da izlaz sistema u nekom trenutku zavisi, ne samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog signala. Primjere dinamičkih sistema predstavljaju električna kola koja sadrže kondenzatore i kalemove. Izlazni napon kondenzatora je funkcija svih prethodnih vrijednosti struje kroz kondenzator. Jednako vrijedi za struju kalema koji zavisi od svih prethodnih vrijednosti napona na njegovim krajevima. Dinamički sistemi se opisuju diferencijalnim jednačinama.

3.2.2 Kauzalni i nekauzalni sistemi

Ovisno o tome da li posjeduju osobinu kauzalnosti, dinamički sistemi mogu biti *kauzani* i *nekauzalni*, dok su statički sistemi kauzalni. Svi fizički sistemi su kauzalni jer ne mogu da generišu izlazni signal prije nego što se pobude. Samo vještački sistemi koje ne rade u realnom vremenu mogu da budu nekauzalni, tj. da generišu izlazne signale u bilo kom vremenskom trenutku $t = t_k$, ne samo na osnovu trenutnih i prethodnih, već i na osnovu vrijednosti pobudnog signala za $t > t_k$.

3.2.3 Stabilni i nestabilni sistemi

Sistem je *stabilan* ako je odziv sistema na ograničen pobudni signal ograničen, u suprotnom je *nestabilan*. Primjer nestabilnog sistema je:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau . \tag{3.31}$$

Za ograničenu pobudu u obliku jediničnog odskočnog signala $x(t) = u(t)$, izlazni signal ovog sistema je signal nagiba $y(t) = r(t)$, koji neograničeno raste pri porastu vremena.

3.2.4 Sistemi sa raspodijeljenim i sistemi sa koncentrisanim parametrima

Složeni dinamički prostorno distribuirani sistemi, čije ponašanje se mijenja i u vremenu i u prostoru, nazivaju se *sistemi sa raspodijeljenim parametrima*. Karakteristični primjeri sistema sa raspodijeljenim parametrima su vezani za prostiranje elektromagnetnih talasa, prostiranje toplote i prenos električne energije. Budući da su u ovim sistemima nezavisne promjenljive i vrijeme i prostorne koordinate, oni se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Ako se može smatrati da je ponašanje prostorno distribuiranog sistema u svakoj tački prostora podjednako i da zavisi samo od vremena kao nezavisne varijable, kažemo da se radi o *sistemu sa koncentrisanim parametrima*. Takvi sistemi se opisuju običnim diferencijalnim jednačinama.

3.2.5 Linearni i nelinearni sistemi

Sistem sa koncentrisanim parametrima je *linearan* ako zadovoljava princip linearnosti dat sa (3.21), u suprotnom je *nelinearan*. Linearni sistemi se opisuju linearnim diferencijalnim jednačinama, dok je za opis nelinearnih sistema neophodno koristiti nelinearne diferencijalne jednačine.

3.2.6 Stacionarni i nestacionarni sistemi

Stacionarni sistemi su dinamički sistemi sa koncentrisanim parametrima koji su vremenski invarijantni. Diferencijalne jednačine koje opisuju stacionarne sisteme imaju konstantne koeficijente.

Ako se ponašanje sistema u toku vremena mijenja, onda se radi o vremenski promjenljivom ili *nestacionarnom sistemu*. Parametri diferencijalne jednačine koja opisuje nestacionarni sistem su vremenski promjenljivi.

3.2.7 Deterministički i stohastički sistemi

Deterministički sistemi transformišu determinističke pobudne signale u determinističke signale odziva. Parametri ovih sistema su takođe deterministički.

Stohastički sistemi transformišu stohastičke pobudne signale u stohastičke signale odziva. Parametri stohastičkih sistema ne moraju, ali mogu biti slučajne varijable.